第 2 节 三角函数图象的变换（★★）

强化训练

1．（2023·全国模拟·★）为了得到函数 $y=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$ 的图象，只需把函数 $y=2\sin x$ 的图象（　　）

（A）向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

（B）向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

（C）向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

（D）向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

答案： C

解析： 在 $y=2\sin x$ 中将 x 换成 $x+\frac{\pi}{3}$，即左移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位，可得到 $y=2\sin(x+\frac{\pi}{3})$，故选 C.

2．（2022·四川成都模拟·★）要得到函数 $y=\cos(2x-\frac{\pi}{4})$ 的图象，只需要将函数 $y=\cos 2x$ 的图象（　　）

（A）向左平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位　　（B）向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位

（C）向左平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位　　（D）向右平移 $\frac{\pi}{4}$ 个单位

答案： B

解析： 先将系数化 1， $y=\cos(2x-\frac{\pi}{4})=\cos 2(x-\frac{\pi}{8})$，在 $y=\cos 2x$ 中将 x 换成 $x-\frac{\pi}{8}$ 即得 $y=\cos(2x-\frac{\pi}{4})$，

所以将 $y=\cos 2x$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 可得 $y=\cos(2x-\frac{\pi}{4})$ 的图象.

3．（2022·山西模拟·★★）为了得到函数 $y=\cos(2x-\frac{\pi}{6})$ 的图象，需把函数 $y=\sin 2x$ 的图象上的所有点至少向左平移_____个单位.

答案： $\frac{\pi}{6}$

解析： 先化同名，二者 x 的系数相同，可利用 $\cos\alpha=\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha)$ 将余弦化正弦，

$y=\cos(2x-\frac{\pi}{6})=\sin[\frac{\pi}{2}+(2x-\frac{\pi}{6})]=\sin 2(x+\frac{\pi}{6})$，在 $y=\sin 2x$ 中将 x 换成 $x+\frac{\pi}{6}$ 即得 $y=\sin 2(x+\frac{\pi}{6})$，

所以将 $y=\sin 2x$ 的图象至少向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，可以得到 $y=\cos(2x-\frac{\pi}{6})$ 的图象.

4．（2022·山东潍坊模拟·★★）为了得到函数 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象，需把 $y=\sin(\frac{\pi}{4}-2x)$ 的图象上所有点至少向右平移_____个单位.

答案： $\frac{5\pi}{24}$

解析： 函数名相同，x 的系数相反，得先将 x 的系数化为相同，可用 $\sin\alpha=\sin(\pi-\alpha)$ 来化，

$y=\sin(\frac{\pi}{4}-2x)=\sin[\pi-(\frac{\pi}{4}-2x)]=\sin(2x+\frac{3\pi}{4})=\sin 2(x+\frac{3\pi}{8})$， $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})=\sin 2(x+\frac{\pi}{6})$，

为了看出平移的量，可用 $x+\frac{3\pi}{8}$ 与 $x+\frac{\pi}{6}$ 作差，

因为 $(x+\frac{3\pi}{8})-(x+\frac{\pi}{6})=\frac{5\pi}{24}$，所以 $(x-\frac{5\pi}{24})+\frac{3\pi}{8}=x+\frac{\pi}{6}$，

即在 $y=\sin 2(x+\frac{3\pi}{8})$ 中将 x 换成 $x-\frac{5\pi}{24}$，可得到 $y=\sin 2(x+\frac{\pi}{6})$，

故至少把 $y=\sin(\frac{\pi}{4}-2x)$ 的图象向右平移 $\frac{5\pi}{24}$ 个单位，可以得到 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象.

5．（2022·河南模拟·★★★）已知函数 $f(x)=\sin(\omega x+\varphi)(\omega>0,0<\varphi<\frac{\pi}{2})$ 的最小正周期为 π，且满足 $f(x+\varphi)=f(\varphi-x)$，则要得到函数 $f(x)$ 的图象，可将 $g(x)=\cos\omega x$ 的图象（　　）

（A）向左平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度　（B）向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度

（C）向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度　（D）向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度

答案： D

解析： 由题意，$f(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{\omega}=\pi$，所以 $\omega=2$，故 $f(x)=\sin(2x+\varphi)$，$g(x)=\cos 2x$，

又 $f(x+\varphi)=f(\varphi-x)$，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=\varphi$ 对称，从而 $2\varphi+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$，故 $\varphi=\frac{k\pi}{3}+\frac{\pi}{6}(k\in\mathbf{Z})$，

结合 $0<\varphi<\frac{\pi}{2}$ 可得 $\varphi=\frac{\pi}{6}$，所以 $f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})$，

为了看出平移的量，先化同名，两者 x 的系数相同，可用 $\sin\alpha=\cos(\alpha-\frac{\pi}{2})$ 将 $f(x)$ 化余弦，

$f(x)=\sin(2x+\frac{\pi}{6})=\cos[(2x+\frac{\pi}{6})-\frac{\pi}{2}]=\cos(2x-\frac{\pi}{3})=\cos 2(x-\frac{\pi}{6})$，

所以将 $g(x)=\cos 2x$ 向右平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位长度，可得到 $f(x)$ 的图象.

6．（2022·福建厦门模拟·★★）将 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象向左平移 $\frac{\pi}{6}$ 个单位，再向上平移两个单位，最后将所有点的横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，则所得的函数图象的解析式为（　　）

（A）$y=\sin(x+\frac{2\pi}{3})+2$　（B）$y=\sin(4x-\frac{2\pi}{3})+2$　（C）$y=\cos 4x+2$　（D）$y=\sin(4x+\frac{2\pi}{3})+2$

答案：D

解析：将 $y=\sin(2x+\frac{\pi}{3})$ 左移 $\frac{\pi}{6}$，得到 $y=\sin[2(x+\frac{\pi}{6})+\frac{\pi}{3}]=\sin(2x+\frac{2\pi}{3})$；

再上移 2 个单位，得到 $y=\sin(2x+\frac{2\pi}{3})+2$；最后横坐标变为 $\frac{1}{2}$ 倍，得到 $y=\sin(4x+\frac{2\pi}{3})+2$.

7.（2022•吉林长春模拟•★★）将函数 $f(x)=\cos(2x+\frac{\pi}{3})$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{3}$ 个单位长度后，再把横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$ 倍，纵坐标不变，得到 $g(x)$ 的图象，则（　　）

（A） $g(x)$ 为奇函数　（B） $g(x)$ 为偶函数　（C） $g(x)$ 的最小正周期为 2π　（D） $g(\frac{2\pi}{3}-x)=g(x)$

答案：D

解析：要判断选项，得先求 $g(x)$ 的解析式，将 $f(x)$ 右移 $\frac{\pi}{3}$，得到 $y=\cos[2(x-\frac{\pi}{3})+\frac{\pi}{3}]=\cos(2x-\frac{\pi}{3})$，

再把横坐标缩短为原来的 $\frac{1}{2}$，得到 $y=\cos(4x-\frac{\pi}{3})$，所以 $g(x)=\cos(4x-\frac{\pi}{3})$，

从而 $g(x)$ 为非奇非偶函数，故 A、B 两项均错误； $g(x)$ 的最小正周期 $T=\frac{2\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，故 C 项错误；

选项 D 的意思是 $g(x)$ 的图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称，要判断这个选项，只需看 $g(\frac{\pi}{3})$ 是否为最值，

$g(\frac{\pi}{3})=\cos(4\times\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{3})=\cos\pi=-1\Rightarrow x=\frac{\pi}{3}$ 是 $g(x)$ 图象的对称轴，故 D 项正确.

8.（2022•河南南阳模拟•★★★）若将函数 $y=\tan(\omega x-\frac{\pi}{4})(\omega>0)$ 的图象向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位长度后，与函数 $y=\tan(\omega x-\frac{\pi}{3})$ 的图象重合，则 ω 的最小值为_____.

答案：1

解析：将函数 $y=\tan(\omega x-\frac{\pi}{4})$ 右移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位，得到 $y=\tan[\omega(x-\frac{\pi}{12})-\frac{\pi}{4}]=\tan(\omega x-\frac{\omega\pi}{12}-\frac{\pi}{4})$ 的图象，

由题意，该图象与 $y=\tan(\omega x-\frac{\pi}{3})$ 的图象重合，两个函数的图象重合，则解析式必定可以互化，

所以 $\tan(\omega x-\frac{\omega\pi}{12}-\frac{\pi}{4})=\tan(\omega x-\frac{\pi}{3})$，从而 $\omega x-\frac{\omega\pi}{12}-\frac{\pi}{4}-(\omega x-\frac{\pi}{3})=k\pi(k\in\mathbf{Z})$，故 $\omega=1-12k$，

又 $\omega>0$，所以 ω 的最小值为 1.

【反思】若 $\tan\alpha=\tan\beta$，则 $\alpha-\beta=k\pi(k\in\mathbf{Z})$.

9.（★★★）若将函数 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{8})$ 的图象向右平移 $\varphi(\varphi>0)$ 个单位，所得的图象关于 y 轴对称，则 φ 的最小值是_____.

答案： $\frac{3\pi}{16}$

解法 1：平移后的函数关于 y 轴对称，指的是 $x=0$ 时取得最值，将 $f(x)=\sin(2x-\frac{\pi}{8})$ 的图象向右平移 φ 个单位可得 $y=\sin[2(x-\varphi)-\frac{\pi}{8}]$，即 $y=\sin(2x-2\varphi-\frac{\pi}{8})$，

该函数的图象关于 y 轴对称，所以 $x=0$ 为最值点，从而 $-2\varphi-\frac{\pi}{8}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，故 $\varphi=-\frac{k\pi}{2}-\frac{5\pi}{16}(k\in\mathbf{Z})$，

又 $\varphi>0$，所以当 $k=-1$ 时，φ 取得最小值 $\frac{3\pi}{16}$.

解法 2：也可由平移后的对称性反推 $f(x)$ 的对称性，从而直接对 $f(x)$ 分析，

因为将 $f(x)$ 右移 φ 个单位后所得图象关于 y 轴对称，所以 $f(x)$ 的图象关于直线 $x=-\varphi$ 对称，

从而 $f(x)$ 在 $x=-\varphi$ 处取得最值，故 $2(-\varphi)-\frac{\pi}{8}=k\pi+\frac{\pi}{2}$，所以 $\varphi=-\frac{k\pi}{2}-\frac{5\pi}{16}(k\in\mathbf{Z})$，

又 $\varphi>0$，所以当 $k=-1$ 时，φ 取得最小值 $\frac{3\pi}{16}$.

10.（2022・安徽模拟・★★★）（多选）为了得到 $y=2\tan(2x-\frac{\pi}{3})$ 的图象，只需把 $y=2\tan(\frac{\pi}{4}-2x)$ 的图象（　　）

（A）先沿 x 轴翻折，再向右平移 $\frac{\pi}{12}$ 个单位

（B）先沿 x 轴翻折，再向右平移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位

（C）先沿 y 轴翻折，再向右平移 $\frac{7\pi}{24}$ 个单位

（D）先沿 y 轴翻折，再向右平移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位

答案：BC

解析：A 项，将 $f(x)$ 沿 x 轴翻折，得到的是 $-f(x)$，

将 $y=2\tan(\frac{\pi}{4}-2x)$ 沿 x 轴翻折，得到 $y=-2\tan(\frac{\pi}{4}-2x)=2\tan(2x-\frac{\pi}{4})=2\tan 2(x-\frac{\pi}{8})$ ①，

而 $y=2\tan(2x-\frac{\pi}{3})=2\tan 2(x-\frac{\pi}{6})$ ②，为了看出由①到②的平移量，可将括号内的部分作差，

因为 $(x-\frac{\pi}{8})-(x-\frac{\pi}{6})=\frac{\pi}{24}$，所以 $(x-\frac{\pi}{24})-\frac{\pi}{8}=x-\frac{\pi}{6}$，

即在 $y=2\tan 2(x-\frac{\pi}{8})$ 中将 x 换成 $x-\frac{\pi}{24}$，可得到 $y=2\tan 2(x-\frac{\pi}{6})$，

所以把 $y=2\tan 2(x-\frac{\pi}{8})$ 右移 $\frac{\pi}{24}$ 个单位，得到 $y=2\tan(2x-\frac{\pi}{3})$，故 A 项错误，B 正确；

C 项，将 $f(x)$ 沿 y 轴翻折，得到的是 $f(-x)$，

将 $y=2\tan(\frac{\pi}{4}-2x)$ 沿 y 轴翻折，得到 $y=2\tan[\frac{\pi}{4}-2(-x)]=2\tan(\frac{\pi}{4}+2x)=2\tan 2(x+\frac{\pi}{8})$，

同上述分析方法可知将 $y=2\tan 2(x+\frac{\pi}{8})$ 右移 $\frac{7\pi}{24}$ 个单位，得到 $y=2\tan(2x-\frac{\pi}{3})$，故 C 项正确，D 项错误.